Egzamin z matematyki dyskretnej

21 czerwca 2024 r.

Część zadaniowa

√**Zadanie 1.** Udowodnij, znajdując interpretację kombinatoryczną, że dla dowolnych liczb naturalnych n, m:

(i) $|\{A \subseteq [m+n+1] : |A| \geqslant n+1\}| = \sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{j} \cdot 2^{m-j}$.
(*Wskazówka: każdy zbiór skończony $A \subseteq \mathbb{N}$ o co najmniej n+1 elementach ma element o numerze $n+1$ w numeracji rosnącej $a_1 < \ldots < a_k$, gdzie $k = |A|$ i $A = \{a_1, \ldots a_k\}$*).

(ii) $\sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{j} \cdot 2^{m-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{m+j}{j} \cdot 2^{n-j} = 2^{m+n+1}$.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ liczba wszystkich zbiorów $A \subseteq [n]$ spełniających warunek

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \ (k \in A \Rightarrow k+1 \in A)$$

jest równa 2 4 5 6 7 . . . -

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

ok .

(*Uwaga: z drugiej strony liczba tych zbiorów jest równa $n+1$ i jest wśród nich zbiór pusty*).

√**Zadanie 3.** Ile różnych chodników długości $n \geqslant 1$ i szerokości 1 (w każdym miejscu dokładnie 1) można ułożyć dysponując nieograniczonym zapasem płyt następujących kształtów i rozmiarów: nieodróżnialne płyty kwadratowe 1×1, nieodróżnialne płyty prostokątne 1×2, nieodróżnialne płyty trójkątne $1 \times 1 \times \sqrt{2}$?

Zadanie 4. Załóżmy, że w danym spójnym grafie (prostym) G każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Usuwamy z grafu G dowolny wierzchołek v wraz ze wszystkimi krawędziami incydentnymi otrzymując graf H. Udowodnij, że jeśli stopień wierzchołka v w grafie G jest równy $2k$, to liczba składowych spójności grafu H wynosi co najwyżej k.

Zadanie 5. *Kolorowaniem krawędziowym* grafu (prostego) $G = (V, E)$ za pomocą k kolorów, gdzie $k > 0$, nazwijmy dowolną funkcję $h : E \to [k]$, taką, że jesli $e_1, e_2 \in E$ są dwiema różnymi krawędziami o wspólnym wierzchołku, to $h(e_1) \neq h(e_2)$.

Udowodnij, że dla dowolnego grafu dwudzielnego $G(V_1, V_2)$ najmniejsza liczba k taka, że istnieje kolorowanie krawędziowe grafu G za pomocą k kolorów (*krawędziowa liczba chromatyczna* grafu G) jest równa $d = \max\{d(v) : v \in V\}$, gdzie $V = V_1 \cup V_2$ jest zbiorem wszystkich wierzchołków grafu G, a $d(v)$ oznacza stopień wierzchołka $v \in V$.

(*Wskazówka: rozważ najpierw przypadek, gdy stopień każdego wierzchołka grafu G jest równy d*).

Przypominamy, że na egzaminie wolno wykorzystywać fakty udowodnione na wykładach (każdorazowo wyraźnie zaznaczając, że się z takiego faktu korzysta), natomiast ewentualne wykorzystanie zadania przeanalizowanego na ćwiczeniach wymaga napisania jego rozwiązania.

Prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej, czytelnie podpisanej** *kartce.*

Egzamin z matematyki dyskretnej

21 czerwca 2024 r.

Część teoretyczna

Podaj definicje i sformułowania następujących pojęć i twierdzeń oraz odpowiedz na zadane pytania, podając krótkie uzasadnienia. 1 element

1. Ile jest ciągów długości $n \geqslant 1$ o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$, których zbiór wyrazów ma co najwyżej 3 elementy?

2. Ile jest ciągów $(a_k)_{k=1}^{n}$ długości $n \geqslant 2$ o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, 3\}$, które spełniają warunek:

$$\exists k \in \{1, \ldots, n-1\}\ a_{k+1} < a_k?$$

3. Ciąg Fibonacciego – jedna, starannie opisana interpretacja kombinatoryczna i wzór rekurencyjny.

4. Uzasadnij wzór ($n \geqslant 1$):

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{g \in S_n} |fix(g)|,$$

gdzie $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ oznacza liczbę Stirlinga I rodzaju, S_n jest grupą wszystkich permutacji zbioru $[n]$, a $fix(g) = \{k \in [n] : g(k) = k\}$ jest zbiorem punktów stałych permutacji $g \in S_n$.

5. Wzór Eulera dla wielościanów wypukłych.

6. Załóżmy, że każdą krawędź grafu pełnego K_n o zbiorze wierzchołków $[n]$ ($n \geqslant 3$) pokolorowaliśmy kolorem czerwonym lub zielonym w taki sposób, że każdy wierzchołek jest incydentny z większą liczbą krawędzi zielonych niż czerwonych. Rozstrzygnij (odwołując się do odpowiedniego twierdzenia), czy graf „zielony" (o zbiorze wierzchołków $[n]$ i wszystkich zielonych krawędziach) ma cykl Hamiltona.

7. Jaki jest kod Prüfera drzewa $T = (V, E)$ o zbiorze wierzchołków

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

i zbiorze krawędzi

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{4, 7\}, \{4, 8\}\}?$$

8. Dla jakich par (n, m), gdzie $n, m \geqslant 1$ i $n + m = 6$, graf $K_{n,m}$ jest planarny?

9. Skojarzenie pełne z V_1 do V_2 w grafie dwudzielnym $G(V_1, V_2)$ i twierdzenie Halla o jego istnieniu.

10. Niech G będzie grafem powstałym w wyniku usunięcia z grafu K_n, gdzie $n \geqslant 2$, jednej krawędzi. Jaka jest liczba chromatyczna grafu G?